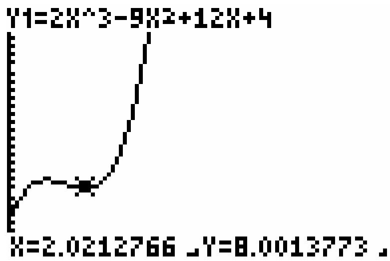
Uitwerkingen hoofdstuk 17 VWO A1,2 deel 5
Regels voor het differentiëren

1. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$

a. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 18x + 12 \Rightarrow$ De snelheid is : $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 6.9 - 18.3 + 12 = 12$

b. Gemiddelde snelheid op het interval [3 ; 3,2] is :
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(3,2) - y(3)}{3,2 - 3} = \frac{15,776 - 13}{0,2} = 13,88$

c. $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 6.4 - 18.2 + 12 = 0$
Verder volgt uit de schets dat we bij x = 2 inderdaad te maken hebben met een minimum.

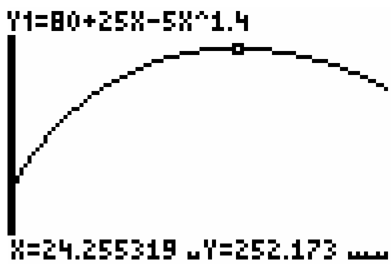


d. Stel k is: $y = a.x + b \Rightarrow$
r.c. = $y'(4)$ = 6 . 16 – 18.4 + 12 = 36 $\Rightarrow$
$y = 36x + b$. De grafiek gaat door het punt (4 , y(4)) = (4 , 36) $\Rightarrow$
36 = 36 . 4 + $b \Leftrightarrow b$ = -108 $\Rightarrow$ De vergelijking van k is : $y = 36x - 108$

2. Gegeven : $q = 80 + 25p - 5p^{1,4}$ en $10 \leq p \leq 60$

a. $\frac{dq}{dp} = 25 - 7p^{0,4} \Rightarrow \left[\frac{dq}{dp}\right]_{p=12,50} = 25 - 7.12,50^{0,4} \approx 5,78$ euro per stuk.

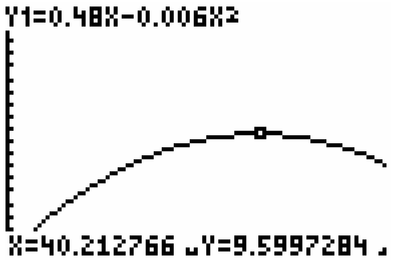
b. $\frac{dq}{dp} = 25 - 7p^{0,4} = 0 \Rightarrow$
Voer in : $y_1 = 25 - 7x^{0,4}$ en neem het window
[0 , 30] X [-20 , 20].
Met de optie zero vinden we $x \approx 24,10$
Uit de schets zien we dat we inderdaad bij $x \approx 24,10$ te maken hebben met een maximum.
Het maximum wordt nu 252,18 $\Rightarrow$
De maximale weekverkoop wordt nu 252 stuks.



3. $E(n) = 0,48n - an^2$

a. a = 0,0066 $\Rightarrow$ $E(n) = 0,48n - 0,006n^2 \Rightarrow \dfrac{dE}{dn} = 0,48 - 0,012n = 0 \Leftrightarrow 0,012n = 0,48 \Leftrightarrow n = 40$

$\Rightarrow$ Inderdaad is bij n = 40 de afgeleide 0. In de schets zien we dat we bij de waarde 40 te maken hebben met een maximum.

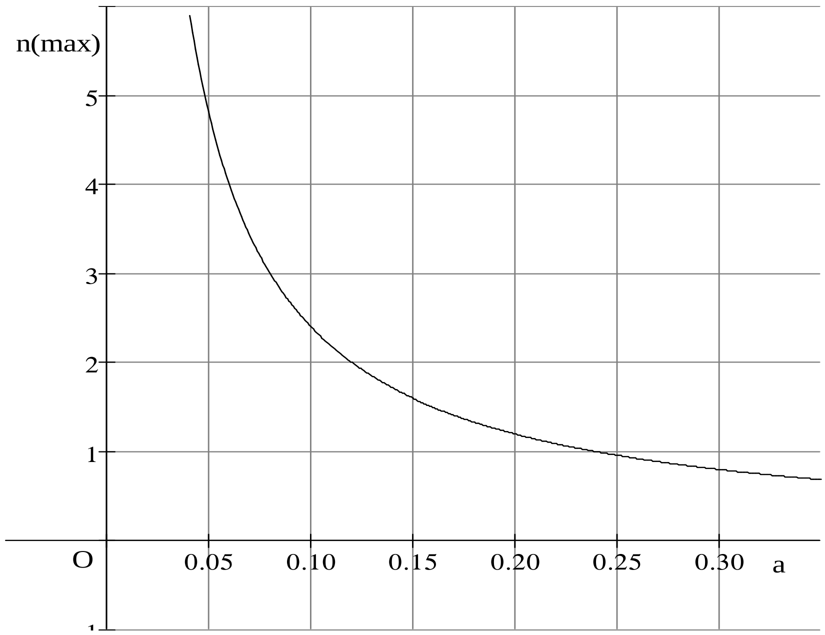


b. Nu weer uitgaan van $E(n) = 0,48n - an^2 \;\Rightarrow\; E'(n) = 0,48 - 2an$
Nu weten we dat geldt : $E'(16) = 0 \Leftrightarrow 0,48 - 2.a.16 = 0 \Leftrightarrow 32a = 0,48 \Leftrightarrow a = 0,015$

c. $E(n) = 0,48n - an^2 \;\Rightarrow\; E'(n) = 0,48 - 2an \;\Rightarrow$

$E'(n_{\max}) = 0 \Leftrightarrow 0,48 - 2an_{\max} = 0 \Leftrightarrow 2a.n_{\max} = 0,48 \Rightarrow n_{\max} = \dfrac{0,24}{a}$

a	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
$n_{\max}$	x	4,8	2,4	1,6	1,2	0,96	0,8

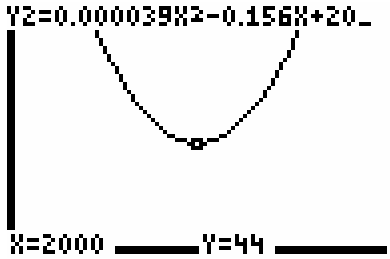


4. $K = 0,000013q^3 - 0,078q^2 + 200q + 30000$ met q het aantal gros per week.

a. 360000 blikken geeft $\dfrac{360000}{144} = 2500$ gros. $\Rightarrow$ GK = $\dfrac{K(2500)}{2500 \cdot 144} = \dfrac{245625}{360000}$ $\approx$ 0,68 euro/blik.

b. Bij q = 360000 blikken hoort 2500 gros. $\Rightarrow$
Voer in $y_1 = \ 0,000013x^3 - 0,078x^2 + 200x + 30000 \ \ \Rightarrow$
$MK_{q=2500}$ = nDeriv(y_1 , x , 2500) ≈ 53,75 euro $\Rightarrow$
De marginale kosten zijn dus 53,75 euro.

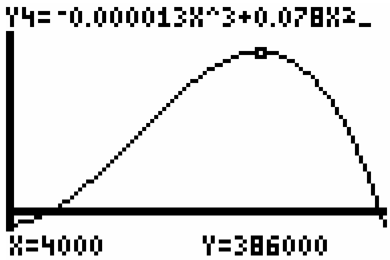
c. $MK = \dfrac{dK}{dq} = 0,000039q^2 - 0,156q + 200$ Dit zijn de marginale kosten. We moeten nu het minimum berekenen van deze marginale kosten , daarom moeten we dus deze laatste functie gaan differentëren. $\Rightarrow MK$ '= 0,000078q – 0,156
MK '= 0 geeft nu : 0,000078q – 0,156 = 0 $\Leftrightarrow$ 0,000078q = 0,156
$\Leftrightarrow q$ = 2000
Uit de schets zien we dat we inderdaad te maken hebben met een minimum bij q = 20000.
De waarde van de minimale marginale kosten is dan :
44 euro.



d. De opbrengst R = prijs . aantal = p . q = 200.q $\Rightarrow$ De winstfunctie wordt nu :
$W = R - K = 200q - \left(0,000013q^3 - 0,078q^2 + 200q + 30000\right) = -0,000013q^3 + 0,078q^2 - 30000$

$\Rightarrow W$ '= -0,000039q^2 +0,156q $\Rightarrow W$ '= 0 geeft : -0,000039q^2 +0,156q = 0

Voer in : y_3 = -0,000039x^2 +0,156x en neem b.v. het window [0 , 6000] X [-100 , 200]
Met de optie zero vinden we x = 0 en x = 4000.
Uit de schets van de winstfunctie zien we dat we bij x = 4000 inderdaad te maken hebben met een maximum.
het maximum is dan 386000 euro.



5. $K = 10^{-6}q^3 - 3.10^{-3}q^2 + 5q + 1000$ met K in duizenden euro's en ook q in duizenden.

Minimum van de snelheid berekenen $\Rightarrow$De afgeleide van de afgeleide berekenen . $\Rightarrow$
K '= $3.10^{-6}q^2 - 6.10^{-3}q + 5$ en K'' = $6.10^{-6}q - 6.10^{-3}$
Er moet nu gelden : K'' = 0 $\Leftrightarrow$ $6.10^{-6}.q - 6.10^{-3} = 0 \Leftrightarrow 6.10^{-6}q = 6.10^{-3} \Leftrightarrow q = 1000$
We moeten het minimum hebben van de snelheid en dus van K ' . Aangezien K 'een dalparabool is weten we met zekerheid dat er een minimum is. Dit minimum is bij q = 1000.
De minimale snelheid is dan : K '(1000) = 2 $\Rightarrow$ De minimale snelheid is 2 euro per stuk.

6. $N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$ met $0 \le t \le 5$.

a. Maximale snelheid $\Rightarrow N$ '' = 0 $\Rightarrow N$ '= $-3t^2 + 12t + 15$ en N '' = -6t + 12
N '' = 0 geeft nu : t = 2 . N ' is een bergparabool . We hebben dus met zekerheid een maximum en dat dus bij t = 2 . $\Rightarrow$ Na twee uur is de snelheid maximaal.

b. $N'(0) = 15 \Rightarrow$ We moeten dus nu oplossen : $N'(t) = 15 \Leftrightarrow -3t^2 + 12t + 15 = 15 \Leftrightarrow$
$-3t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow -3t(t-4) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 4 \Rightarrow$ Na 4 uur is er dus een pauze.

7. De marginale kosten is de afgeleide van K dus K'.
We zien in de grafiek dat de helling eerst afneemt tot aan het buigpunt en dan weer toeneemt.
Het moet dus figuur C zijn.

8.

a. $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x-as en is dus negatief $\Rightarrow$ y daalt dus.

b. Hoogste punt van $\frac{dy}{dx}$ ligt boven de x-as. $\Rightarrow$ y van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

c. Hoogste punt van $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x-as. $\Rightarrow$ De grafiek van y gaat van afnemend dalend naar toenemend dalend.

d. Laagste punt van $\frac{dy}{dx}$ boven de x-as. $\Rightarrow$ y van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.

e. $\frac{dy}{dx}$ is dalend en ligt boven de x-as. $\Rightarrow$ De grafiek van y is dus afnemend stijgend.

f. $\frac{dy}{dx}$ is stijgend en snijdt de x-as. $\Rightarrow$ De grafiek van y gaat van dalen over in stijgen en heeft dus een minimum.

9.

a. Grafiek van y is afnemend dalend. $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ stijgt maar is < 0. $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ ligt dus onder de x-as en stijgt.

b. Grafiek van y heeft een laagste punt. D.w.z. dat de grafiek van y eerst daalt en dan weer stijgt. Dus de afgeleide is eerst negatief en dan 0 en dan positief. $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ is stijgend en snijdt de x-as.

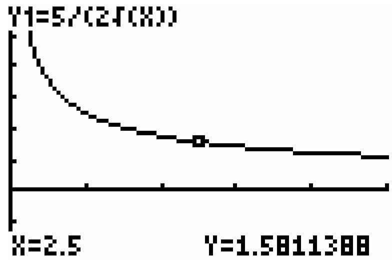
c. De grafiek ban y is afnemend stijgend. $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ daalt ,maar $\frac{dy}{dx}$ is > 0. $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ daalt en ligt boven de x-as.

d. De grafiek van y gaat van afnemend stijgend naar toenemend stijgend. $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}$ neemt eerst af en neemt dan weer toe en $\dfrac{dy}{dx}$ is positief. $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}$ heeft een minimum en ligt boven de x-as.

10. Gegeven : $y = 5\sqrt{x} - 3$

$$y = 5\sqrt{x} - 3 \;\Rightarrow\; y' = 5.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

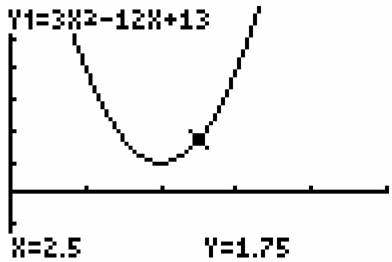
Uit de schets zien we dat de afgeleide boven de x-as ligt en verder daalt. $\Rightarrow$ Er is dus bij de grafiek van y een afnemende stijging.



11. Gegeven : $K = q^3 - 6q^2 + 13q + 15$ met K in euro's en q in kg.

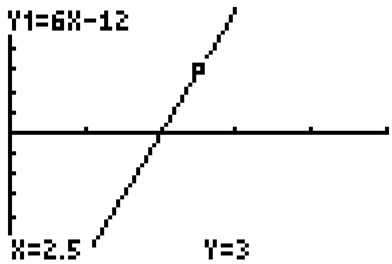
a. $\dfrac{dK}{dq} = 3q^2 - 12q + 13$ Nu de schets van K '$\Rightarrow$

We zien dat de afgeleide groter dan 0 is en dus stijgt K. Vervolgens zien we dat K 'eerst afneemt en dan weer toeneemt . Dat betekent voor K dat K eerst afnemend stijgend is en dan weer toenemend stijgend is.



b. $MK = \dfrac{dK}{dq} = 3q^2 - 12q + 13$ en $MK' = K'' = 6q - 12$

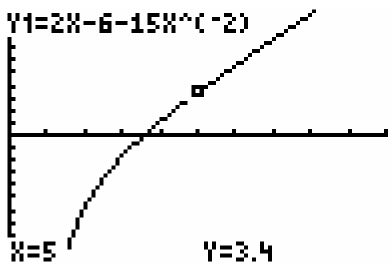
Uit de schets van MK'zien we dat MK ' eerst negatief is dan gelijk is aan 0 en dan positief is. Dat betekent dat de grafiek van MK eerst daalt dan horizontaal is en vervolgens stijgt. Er is dan dus sprake van een minimum bij MK.



c. $GK = \dfrac{K}{q} = \dfrac{q^3 - 6q^2 + 13q + 15}{q} = q^2 - 6q + 13 + \dfrac{15}{q} = q^2 - 6q + 13 + 15q^{-1} \;\Rightarrow$

GK '$= 2q - 6 - 15q^{-2}$ Nu de schets van GK ':

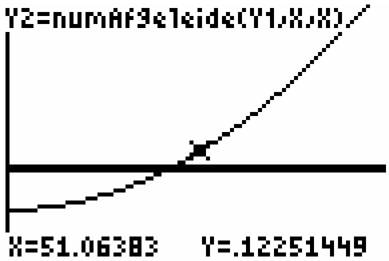
We zien dan dat GK 'eerst negatief is dan gelijk aan 0 is en dan weer positief is. Dit betekent voor GK dat de grafiek van GK eerst daalt dan horizontaal is en dan weer gaat stijgen.
GK heeft daarom een minimum.



12. Gegeven : $N = 0{,}000045t^3 - 0{,}2295t + 100{,}84$ met t in jaren en $t = 0$ in 1940.

a. 2003 $\Rightarrow t = 63$ Voer in $y_1 = 0{,}000045x^3 - 0{,}2295x + 100{,}84 \Rightarrow y_1(63) = N(63) \approx 97{,}63 \Rightarrow$ De verhouding tussen het aantal vrouwen en het aantal mannen is dan 97,63 : 100.
Het aantal mannen in 2003 is dan dus : $\dfrac{97{,}63}{197{,}63}.290 \approx 143{,}3$ miljoen.

b. $\dfrac{dN}{dt} = 0{,}000135t^2 - 0{,}2295$ De schets geeft :

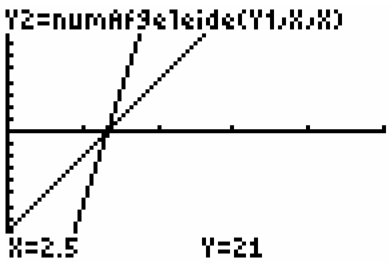


We zien dan dat $\dfrac{dN}{dt}$ eerst negatief is dan gelijk aan 0 is en dan weer positief is. Dit betekent voor N dat de grafiek van N eerst daalt dan horizontaal is en dan weer gaat stijgen.
N heeft daarom een minimum.

c. $\dfrac{dN}{dt} = 0$ geeft : $0{,}000135t^2 - 0{,}2295 = 0 \Leftrightarrow 0{,}000135t^2 = 0{,}2295 \Leftrightarrow 135t^2 = 229500 \Leftrightarrow$
$t^2 = 1700 \Rightarrow t \approx 41{,}2$. We weten dat er een minimum is bij N. $\Rightarrow$ Er is dus een minimum bij $t \approx 41{,}2$ dus in het jaar 1981. $\Rightarrow N_{\min} \approx 94{,}5 \Rightarrow$ Het percentage mannen is dan dus :
$\dfrac{94{,}5}{194{,}5}.100\% \approx 48{,}6$ %.

13. $y = (3x - 4)^2$

a. Sandra : $\dfrac{dy}{dx} = 2(3x - 4)$ Voer nu in : $y_1 = (3x - 4)^2$ en
y_2 = nDeriv(y_1 , x, x) en $y_3 = 2(3x - 4)$
en neem b.v. het window [0 , 5] X [-10 , 10] en plot y_2 en y_3.
We zien dat het resultaat van y_2 en y_3 verschillend is.
$\Rightarrow$ De afgeleide van y_1 is niet 2(3x – 4)



b. $y = (3x - 4)^2 = (3x - 4)(3x - 4) = 9x^2 - 12x - 12x + 16 =$
$9x^2 - 24x + 16 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 18x - 24$

c. $\dfrac{dy}{dx} = 18x - 24$ = 3 . 2.(3x – 4) = 6(3x – 4) = 18x – 24 $\Rightarrow$ Met factor 3.

14.

a. $y = \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{u}$ met $u = x^2 + 5 \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ en $\dfrac{du}{dx} = 2x$

b. $y = 5(7x-3)^4 = 5u^4$ met $u = 7x - 3$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{du} = 20u^3$ en $\dfrac{du}{dx} = 7$

c. $y = 3.\sqrt{5x\ -2} = 3.\sqrt{u}$ met $u = 5x - 2 \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = 3.\dfrac{1}{2\sqrt{u}} = \dfrac{3}{2\sqrt{u}}$ en $\dfrac{du}{dx} = 5$

d. $y = \dfrac{8}{(2x+9)^3} = \dfrac{8}{u^3} = 8.u^{-3}$ met $u = 2x + 9 \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = -24u^{-4}$ en $\dfrac{du}{dx} = 2$

15.

a. $y = -3(2x-5)^6 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -18.(2x-5)^5.2 = -36(2x-5)^5$

b. $y = \left(x - 4x^2\right)^5 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5.(x-4x^2)^4.(1-8x)$

c. $y = \dfrac{8}{\left(x^2+4\right)^3} = 8.\left(x^2+4\right)^{-3} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -24.\left(x^2+4\right)^{-4}.2x = -48x.\left(x^2+4\right)^{-4}$

d. $y = \dfrac{4}{\left(2-x\right)^4} = 4.\left(2-x\right)^{-4} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -16.\left(2-x\right)^{-5}.(-1) = 16\left(2-x\right)^{-5}$

e. $y = 6.\sqrt{3-2x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 6.\dfrac{1}{2\sqrt{3-2x}}.(-2) = \dfrac{-12}{2.\sqrt{3-2x}} = \dfrac{-6}{\sqrt{3-2x}}$

f. $y = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.2x = \dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

16. Gegeven: $S = \dfrac{2}{\left(3-a^2\right)^5}$ en $K = \sqrt{2q+1}$ en $W = 6.\left(x^2-2x+5\right)^{0,7}$

a. $S = 2.\left(3-a^2\right)^{-5} \Rightarrow \dfrac{dS}{da} = -10.\left(3-a^2\right)^{-6}.(-2a) = 20a.\left(3-a^2\right)^{-6}$

b. $\dfrac{dK}{dq} = \dfrac{1}{2\sqrt{2q+1}}.2 = \dfrac{1}{\sqrt{2q+1}}$

c. $\dfrac{dW}{dx} = 4,2.\left(x^2-2x+5\right)^{-0,3}.(2x-2) = (8,4x-8,4).\left(x^2-2x+5\right)^{-0,3}$

17.

a. $\frac{d}{dq}\left((5q+2)^4-3q\right)=4.(5q+2)^3.5-3=20(5q+2)^3-3$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{(x+1)^8}+x^2\right)=\frac{d}{dx}\left(5.(x+1)^{-8}+x^2\right)=-40.(x+1)^{-9}.1+2x=-\frac{40}{(x+1)^9}+2x$

18. Gegeven : $TK=1000.\sqrt{q^3+10}$ en $TO=-700.(q^2-30q+70)$ in duizenden euro's en q is het aantal geproduceerde artikelen per week in duizenden.

a. $MK=TK'=1000.\frac{1}{2\sqrt{q^3+10}}.3q^2=\frac{1500q^2}{\sqrt{q^3+10}} \Rightarrow MK(35)\approx 8873 \Rightarrow$

De marginale kosten zijn ongeveer 8873 euro.

b. $W=TO-TK=-700.(q^2-30q+70)-1000.\sqrt{q^3+10} \quad \Rightarrow$

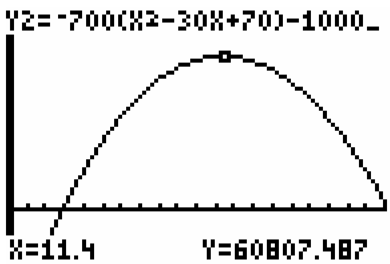
$$\frac{dW}{dq}=-700.(2q-30)-1000.\frac{1}{2\sqrt{q^3+10}}.3q^2=-1400q+21000-\frac{1500q^2}{\sqrt{q^3+10}}$$

Nu moet gelden : $\frac{dW}{dq}=0$ Voer in :

$y_1 = \quad -1400x+21000-\frac{1500x^2}{\sqrt{x^3+10}}$

en neem b.v. het window [0 , 15] X [-1000 , 1000].
Met de optie zero vinden we $x \approx 11{,}4$.

Verder zien we in de schets dat we bij $q \approx 11{,}4$ inderdaad te maken hebben met een maximum.



19. Gegeven : $p=\sqrt{12500-25q}$ met p in euro's en q is de dagverkoop tussen 10 en 500.

$$\frac{dp}{dq}=\frac{1}{2.\sqrt{12500-25q}}.(-25)=\frac{-25}{2\sqrt{12500-25q}} \Rightarrow$$

De snelheid bij q = 250 is nu : $\left[\frac{dp}{dq}\right]_{q=250} \approx$ -0,16 $\Rightarrow$

De afname is dus ongeveer 16 eurocent per stuk.

20. $R(q)=100q-0,01q^2$ met $q(t)=25t+2500$

a. $q(12)=25.12+2500=2800 \;\Rightarrow\; R(2800)=100.2800-0,01.2800^2=201600 \Rightarrow$
De dagopbrengst is dus 201600 euro.

b. $\dfrac{dR}{dq}=100-0,02q$ en $\dfrac{dq}{dt}=25$ Als q = 4000 dan t = 60 $\Rightarrow$
$\left[\dfrac{dR}{dq}\right]_{q=4000}=100-0,02.4000=20$ en $\left[\dfrac{dq}{dt}\right]_{t=60}=\dfrac{dq}{dt}=25$

c. $\dfrac{dR}{dt}=\dfrac{dR}{dq}.\dfrac{dq}{dt}\Rightarrow\left[\dfrac{dR}{dt}\right]_{q=4000}=\left[\dfrac{dR}{dq}\right]_{q=4000}.\left[\dfrac{dq}{dt}\right]_{t=60}=20.25=500$

d. $\dfrac{dR}{dt}=\dfrac{dR}{dq}.\dfrac{dq}{dt}\Rightarrow R'_{q=3500}=\left[\dfrac{dR}{dt}\right]_{q=3500}=\left[\dfrac{dR}{dq}\right]_{q=3500}.\left[\dfrac{dq}{dt}\right]_{t=40}=30.25=750$

e. Bij t = 8 hoort q = 25 . 8 + 2500 = 2700 $\Rightarrow$
$\dfrac{dR}{dt}=\dfrac{dR}{dq}.\dfrac{dq}{dt}\Rightarrow R'(8)=\left[\dfrac{dR}{dt}\right]_{t=8}=\left[\dfrac{dR}{dq}\right]_{q=2700}.\left[\dfrac{dq}{dt}\right]_{t=8}=(100-0,02.2700).25=46.25=1150$

21.

a. $BE^2=AB^2+AE^2\Rightarrow BE^2=10^2+5^2=125\Rightarrow BE=\sqrt{125}$ km $\approx$ 11180 meter.

b. De aanlegkosten zijn dan : 10000 . 140 + 5000 . 100 = 1700000 euro

c. AC = 2 km $\Rightarrow CE^2=AC^2+AE^2\Rightarrow CE^2=4+25=29\Rightarrow CE=\sqrt{29}$ km $\approx$ 5385 m.
De aanlegkosten zijn dan : BC . 100 + CE .140 = 8000 . 100 + 5385 . 140 $\approx$ 1553900 euro.

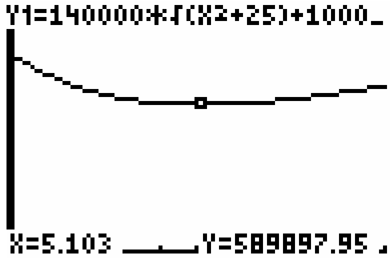
d. Nu AP = x km dan BP = 10 – x km.
De aanlegkosten van het stuk BP is dan : (10 – x).1000 . 100 = (10 – x).100000 =
1000000 – 100000x euro.

e. Voor het traject BPE hebben we nog PE nodig. We gaan dus eerst PE berekenen. $\Rightarrow$
$PE^2=AP^2+AE^2\Rightarrow PE^2=x^2+25\Rightarrow PE=\sqrt{x^2+25}$ km = 1000. $\sqrt{x^2+25}$ meter.
De aanlegkosten voor PE zijn dan : 140.1000. $\sqrt{x^2+25}$ = 140000. $\sqrt{x^2+25}$ euro

f. TK = BP . 100 + PE . 140 =1000000 – 100000x +140000. $\sqrt{x^2+25}$

g. TK =1000000 - 100000x +140000. $\sqrt{x^2+25} \Rightarrow \dfrac{dTK}{dx} = -100000 + 140000.\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+25}}.2x =$

$-100000 + \dfrac{140000}{\sqrt{x^2+25}}$ Nu geldt : $\left[\dfrac{dTK}{dx}\right]_{x=5,103} = 0$



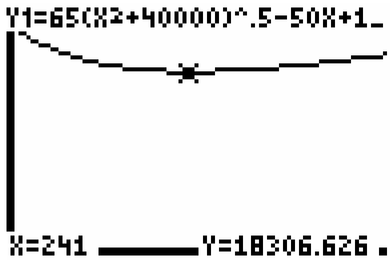
Nu weten we dat er eventueel een maximum of een minimum is. Nu nog even de schets van TK .
We zien inderdaad dat er bij $x \approx 5{,}103$ sprake is van een minimum van TK.

22. Zie de tekening in het boek. Aanlegkosten over land: 50 euro/m en in de rivier zijn de aanlegkosten 65 euro/m.

a. Gegeven $AP = x \Rightarrow EP^2 = AP^2 + AE^2 \Rightarrow EP^2 = x^2 + 40000 \Rightarrow EP = \sqrt{x^2+40000}$
Verder geldt dat $PF = 2000 - x \Rightarrow$
$TK = (20000 - x).50 + \sqrt{x^2+40000}.65 = 65.\sqrt{x^2+40000} - 50x + 100000$

b. $\dfrac{dTK}{dx} = 65.\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+40000}}.2x - 50 = \dfrac{65x}{\sqrt{x^2+40000}} - 50$

Nu de controle: $\Rightarrow \left[\dfrac{dTK}{dx}\right]_{x=241} = 0 \Rightarrow$ Net als in de vorige opgave is er misschien sprake van een maximum of een minimum bij $x \approx 241$. Nu nog de schets van TK
We zien dan dat er inderdaad bij $x \approx 241$ sprake is van een minimum van TK.



23.
De exponent ervoor en de nieuwe exponent 1 lager gebruiken we bij $y = x^3$

Bij $y = 3^x$ geldt : $\dfrac{dy}{dx} = 3^x.\ln(3)$

24.

a. $y = 2^{2x-3} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2^{2x-3}.\ln(2).2$

b. $y = 5.2^{1-x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5.2^{1-x}.\ln(2).(-1) = -5.2^{1-x}.\ln(2)$

c. $y = 5 + 10^{2x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 10^{2x}.\ln(10).2$

d. $y = 7x - 0,9.5^{-x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 7 - 0,9.5^{-x}.\ln(5).(-1) = 7 + 0,9.5^{-x}.\ln(5)$

25. Gegeven : $N = 100.(1-3^{-0,02t})$ met t in uren.

a. Voer in : $y_1 = 100.(1-3^{-0,02x})$ Dan geldt: $N(15) = y_1(15) = 28,078 \Rightarrow$
Na 15 uur typt die persoon dan ongeveer 28 woorden per minuut.

b. $N(25) \approx 42,27$ en $N(20) \approx 35,56 \Rightarrow$ De toename is dan ongeveer 7 woorden per minuut.

c. Bij 60 woorden per minuut moet gelden : $N = 60$
Voer ook in $y_2 = 60$ en neem b.v. het window [0 , 60] X [0 , 100]
Met de optie intersect vinden we het snijpunt bij $x \approx 41,7$. $\Rightarrow$
Na ongeveer 42 uur kan die persoon dan ongeveer 60 woorden per minuut typen.

d. $N = 100.(1-3^{-0,02t}) = 100 - 100.3^{-0,02t} \Rightarrow N'(t) = -100.3^{-0,02t}.\ln(3).(-0,02)$
Voer dit in : $y_2 = -100.3^{-0,02x}.\ln(3).(-0,02) \Rightarrow N'(20) = y_2(20) \approx 1,4159 \Rightarrow$
Na 20 uur is de snelheid waarmee het aantal woorden per minuut getypt kan worden ongeveer 1,42 woorden per uur.

e. Bekijk de tabel van $N = y_1$ en neem stappen van b.v. 100

t	0	100	200	300	400	500	600
$N = y_1$	0	88,89	98,77	99,86	99,99	100	100

We zien dan dat de grenswaarde 100 zal zijn.

26. $Q = 7,5.\left(1-2^{-0,03t}\right)$ met Q is de totale hoeveelheid zout in het vat in kg na t minuten.
De inhoud van het vat is 50 liter en de zoutconcentratie van het water is 150 gram/liter.

a. 60 gram zout per liter geeft een hoeveelheid van 50 . 60 gram = 3000 gram = 3 kg. Er moet dus gelden : $Q = 3$
Voer in : $y_1 = 7,5.\left(1-2^{-0,03x}\right)$ en $y_2 = 3$ en neem b.v. het window [0 , 120] X [0 , 5]
Met de optie intersect vinden we het snijpunt bij $x \approx 24,6$. $\Rightarrow$
Na ongeveer 25 minuten is er 60 gram zout per liter in het vat.

b. We gaan weer een tabel bekijken $\Rightarrow$

t	0	100	200	300	400	500	600
Q= y_1	0	6,56	7,38	7,49	7,50	7,50	7,50

Het verzadigingsniveau is dus 7,5 kg zout.
Het water dat naar binnen komt heeft een concentratie van 150 gram per liter .

Dat is dus 150 keer 50 = 7500 gram per 50liter en dat is dus 7,5 kg per 50 liter.
Op den duur wordt de concentratie van het water in het vat dus gelijk aan de concentratie van het water dat naar binnen gaat.

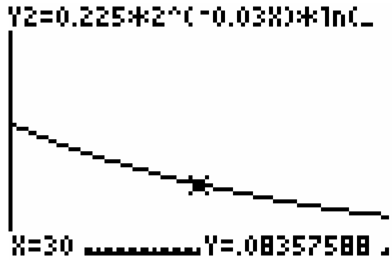
c. $Q = 7,5.\left(1 - 2^{-0,03t}\right) = 7,5 - 7,5.2^{-0,03t} \Rightarrow \dfrac{dQ}{dt} = -7,5.2^{-0,03t}.\ln(2).(-0,03) = 0,225.2^{-0,03t}.\ln(2)$

Voer deze formule in $\Rightarrow y_2 = 0,225.2^{-0,03x}.\ln(2) \Rightarrow \left[\dfrac{dQ}{dt}\right]_{t=12} = y_2(12) \approx 0,1215 \Rightarrow$

De snelheid is dan ongeveer 122 gram/minuut.

d. Eerst een schets van $\dfrac{dQ}{dt} \Rightarrow$ Neem b.v. het window [0 , 60] X [0 , 0.3]

Uit de schets volgt dat de afgeleide dalend is en positief is.
De grafiek van Q blijft dus afnemend stijgen.



27. Gegeven : $P = Q + (100 - Q).2^{-kt}$ met $k > 0$ en t in weken.

a. Aangezien $k > 0$ geldt dat 2^{-k} een positieve breuk is en kleiner dan 1. Dus gaat 2^{-kt} naar 0 als t steeds groter wordt. Dat betekent dat $(100 – Q).\ 2^{-kt}$ gaat eveneens naar 0. De andere Q staat hier los van . Daarom gaat op den duur P naar de waarde Q toe. $\Rightarrow$
De grenswaarde is dus Q.

b. Nu $Q = 40$ en $k = 0,7 \Rightarrow P = 40 + (100 - 40).2^{-0,7t} = 40 + 60.2^{-0,7t}$
Voer in : $y_1 = 40 + 60.2^{-0,7x} \Rightarrow P(4) \approx 48,6 \Rightarrow$ 48,6 % is dan nog aanwezig.

c. $P(6) \approx 43,3 \Rightarrow$ Na 6 weken is nog ongeveer 43,3 % aanwezig en
$P(5) \approx 45,3 \Rightarrow$ Na 5 weken is nog ongeveer 45,3 % aanwezig.
$\Rightarrow$ In de 6^{e} week is dus ongeveer 2% verloren gegaan.

d. $P = 40 + (60).2^{-0,7t} \Rightarrow \dfrac{dP}{dt} = 60.2^{-0,7t}.\ln(2).(-0,7) = -42.2^{-0,7t}.\ln(2) \Rightarrow$

$\left[\dfrac{dP}{dt}\right]_{t=6} = -42.2^{-0,7.6}.\ln(2) \approx -1,58 \Rightarrow$

Na 6 weken neemt de kennis af met ongeveer 1,58% per week.

e. $P = Q + (100 - Q).2^{-0,8t}$ Na 4 weken $\Rightarrow t = 4$ en $P = 42 \Rightarrow$ Er geldt dus:

$Q + (100 - Q).2^{-3,2} = 42$ Voer in : $y_1 = x + (100 - x).2^{-3,2}$ en $y_2 = 42$ en neem b.v. het window [0 , 60] X [0 , 75]. Met de optie intersect vinden we $x \approx 34,9 \Rightarrow$
Bij Paula krijg je $Q \approx 35$.

f. We hebben dan bij Bart: $Q = 20$; $t = 6$ en $P = 65 \Rightarrow 20+(80).2^{-k.6} = 65 \Leftrightarrow 80.2^{-6k} = 45$

Voer in : $y_3 = 80 \,.\, 2^{-6x}$ en $y_4 = 45$ en neem b.v. het window [0 , 2] X [0 , 70]
Met intersect vinden we $x \approx 0{,}138 \Rightarrow k \approx 0{,}14$

28.

a. $^{10}\log(100) = 2$

b. $^{10}\log(0{,}1) = -1$

c. $^{0,5}\log(2) = -1$

d. $^{3}\log(3^5) = 5$

e. $^{4}\log(4) = 1$

f. $^{4}\log(0{,}25) = -1$

g. $^{10}\log(10^{5,1}) = 5{,}1$

h. $^{10}\log(1) = 0$

i. $^{10}\log(\sqrt{10}) = 0{,}5$

29.

a. $^{3}\log x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81$

b. $^{0,5}\log(x) = -2 \Leftrightarrow x = 0{,}5^{-2} \Leftrightarrow x = 4$

c. $^{2}\log(x+1) = 5 \Leftrightarrow x+1 = 2^5 \Leftrightarrow x = 31$

d. $^{5}\log(x) = -1 \Leftrightarrow x = 5^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

e. $^{0,5}\log(x-2) = -3 \Leftrightarrow x-2 = 0{,}5^{-3} \Leftrightarrow x-2 = 8 \Leftrightarrow x = 10$

f. $^{2}\log(0{,}5x-1) = 4 \Leftrightarrow 0{,}5x-1 = 2^4 \Leftrightarrow 0{,}5x = 16+1 \Leftrightarrow x = 34$

30.

a. $3.\,^{2}\log(x) = 5 \Leftrightarrow \,^{2}\log(x) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x \approx 3{,}17$

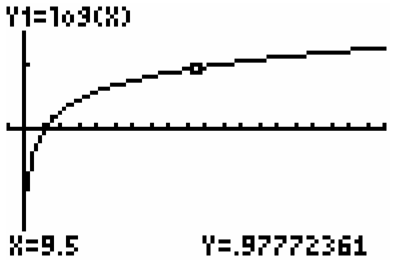
b. $3{,}1+\,^{2}\log(x) = 5{,}2 \Leftrightarrow \,^{2}\log(x) = 2{,}1 \Leftrightarrow x = 2^{2,1} \Leftrightarrow x \approx 4{,}29$

c. $3+5.\,^{2}\log(x-3) = 12 \Leftrightarrow 5.\,^{2}\log(x-3) = 9 \Leftrightarrow \,^{2}\log(x-3) = \frac{9}{5} \Leftrightarrow x-3 = 2^{\frac{9}{5}} \Leftrightarrow x \approx 6{,}48$

31.

a. $\log(18) \approx 1{,}26$ $\log(180) \approx 2{,}26$ $\log(0,02) \approx$ -1,70 $\log(1{,}1) \approx 0{,}04$

b.



c. $y = 10^x$ is de inverse functie van $y = {}^{10}\log(x)$

32.

a. $^{2}\log(18) = \dfrac{\log(18)}{\log(2)} \approx 4{,}17$

b. $^{0,8}\log(51) = \dfrac{\log(51)}{\log(0,8)} \approx -17{,}62$

c. $^{0,3}\log(1234) = \dfrac{\log(1234)}{\log(0,3)} \approx -5{,}91$

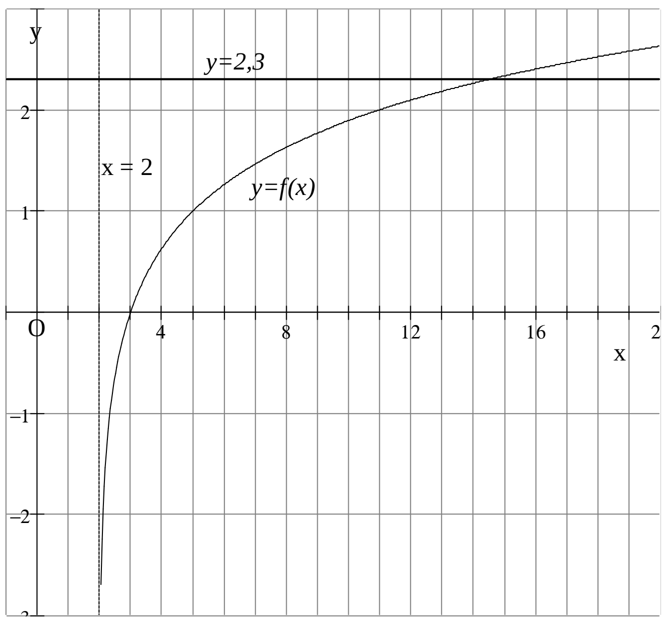
33. Gegeven $f(x) = {}^{3}\log(x-2)$

a. Voer in : $y_1 = \dfrac{\log(x-2)}{\log(3)}$

x	2,5	3	4	5	6	8
y_1	-0,63	0	0,63	1	1,26	1,63

De verticale asymptoot is de lijn $x = 2$

Zie de figuur rechts.



b. Eerst oplossen :
$f(x) = 2{,}3$
Voer ook in $y_2 = 2{,}3 \Rightarrow$
De optie intersect geeft $x \approx 14{,}51$
Teken vervolgens in de figuur de horizontale lijn : $y = 2{,}3$ en lees vervolgens af:
$f(x) < 2{,}3 \Leftrightarrow 2 < x < 14{,}51$

34. $R(x) = 100000 + 15000.\log(x+2)$ met R de opbrengst in euro's per week en x het bedrag in euro's per week aan reclame.

a. $R(10000) = 100000 + 15000.\log(10000+2) \approx 160001$ euro en
$R(100000) \approx 175000 \Rightarrow$ De opbrengst is in week 17 : $\dfrac{175000}{160001} \approx 1{,}09$ keer zo groot.

b. $R = 200000 \Rightarrow$ Voer in $y_1 = 100000 + 15000.\log(x+2)$ en $y_2 = 200000$
Probleem met het vinden van het goede window. Bekijk de tabel en neem uiteindelijk na wat zoeken het window [0 , 5000000] X [100000 , 300000]
Met de optie intersect vinden we uiteindelijk: $x \approx 4641587 \Rightarrow$ Bij $r = 200000$ euro moet ruim 4,6 miljoen euro worden uitgegeven aan reclame.
De reclamekosten zijn dus veel meer dan de opbrengst .

c. $R(20000) \approx 164516$ euro en $R(19000) \approx 164182$ euro.
Dan $R(20000) - R(19000) \approx 334$ D.w.z. dat bij een toename aan reclamekosten van 19000 naar 20000 een extra opbrengst oplevert van maar 334 euro. Niet gunstig dus.

35. Gegeven : $h = 70{,}228 + 5{,}104x + 21{,}234.\log(x)$ met h in cm en x in jaren.

a. 5^e levensjaar $\Rightarrow x$ van 4 naar 5. Voer in : $y_1 = 70{,}228 + 5{,}104x + 21{,}234.\log(x) \Rightarrow$
$h(5) = y_1(5) \approx 110{,}6$ en $h(4) \approx 103{,}4 \Rightarrow$ De procentuele toename is dan :
$\dfrac{110{,}6 - 103{,}4}{103{,}4}.100\% \approx 7{,}0\ \%$.

b. Vanaf 1 maart naar 1 december hebben we 9 maanden $\Rightarrow t$ van $\dfrac{9}{12}$ naar $\dfrac{10}{12}$.
De toename in lengte is dan : $h\left(\dfrac{10}{12}\right) - h\left(\dfrac{9}{12}\right) \approx 72{,}80 - 71{,}40 = 1{,}4 = 14$ mm.

c. Nu omgekeerd. $h = 1$ meter $= 100$ cm $\Rightarrow$ Voer verder in : $y_2 = 100$ en neem b.v. het window [0 , 15] X [0 , 150]. Met intersect vinden we $x \approx 3{,}546$. .
Dat is dus 3 jaar en 0,546 . 12 $\approx$ 7 maanden. De leeftijd is dan ongeveer 3 jaar en 7 maanden.

d. De leeftijd is 2 jaar en 3 maanden $\Rightarrow x = 2{,}25 \Rightarrow$ De snelheid is dan :
nDeriv (y_1 , x , 2.25) $\approx 9{,}20 \Rightarrow$ Een kind van 2 jaar en 3 maanden groeit met een snelheid van 9,20 cm/jaar en dat is ongeveer 0,77 cm per maand en dat is dus ongeveer 8 mm per maand.

36. $\log(N) = 5{,}3 - 1{,}7\log(D)$ met N is het aantal bomen per ha en D de diameter in cm.

a. Diameter is 0,5 meter = 50 cm $\Rightarrow \log(N) = 5{,}3 - 1{,}7.\log(50) \approx 2{,}41 \Rightarrow$
$N = 10^{2{,}41175} \approx 258 \Rightarrow$ Het aantal bomen is dan ongeveer 258.

b. Bij 8 ha staan 2000 bomen . Dat zijn dus 250 bomen per ha. $\Rightarrow N = 250. \Rightarrow$

$\log(250) = 5,3 - 1,7.\log(D) \Leftrightarrow 1,7\log(D) \approx 2,902... \Leftrightarrow \log(D) \approx \dfrac{2,902...}{1,7} \approx 1,707... \Rightarrow$

$D = 10^{1,707...} \approx 50,94 \Rightarrow$ De gemiddelde diameter is dan ongeveer 51 cm.

37.

a. Aflezen uit de figuur in het boek geeft bij een lengte van 2 meter een sprintsnelheid van 20 m/s en een gewone snelheid van ongeveer 2,8 m/s.

b. Goudvis met een lengte van 20 cm = 0,2 meter.
De sprintsnelheid is ongeveer 2 m/s en de gewone snelheid is ongeveer 0,9 m/s.

c. Nu sprintsnelheid = gewone snelheid $\Rightarrow$ snijpunt. Aflezen geeft een lengte van ongeveer 0,04 meter = 4 cm.

d. Nu is de sprintsnelheid 10 keer de gewone snelheid. D.w.z. dat het verschil precies de hoogte van 1 blok is. In de figuur is een blokhoogte ongeveer 22mm. Nu moet de sprintsnelheid dus 22 mm hoger liggen dan de gewone snelheid.
We komen dan op een lengte van ongeveer 4 meter.

e. Bij grotere vissen gaan de grafieken veel verder uit elkaar en dus wordt de vermenigvuldigingsfactor ook steeds meer.
B.v. bij een vis met lengte 1 is de factor 10/2 = 5 en bij een vis met een lengte van 4 is de factor 10. (vraag d)

f. We gaan een aantal waarden vergelijken:

Lengte in cm	0,04	0,3	1	2	4	10
Sprintsnelheid in m/s	0,4	3	10	20	40	100

In de tabel is duidelijk te zien dat het quotiënt van lengte en sprintsnelheid gelijk is aan 10.

38.

a. Schouderhoogte van 20 inches dan is de maximale spanwijdte G ongeveer 14 inches.
Volgens het model zou G 10 inches moeten zijn. De afwijking is dan dus
$\dfrac{14-10}{10}.100\%$ = 40 %.

b. Nu gegeven : $G = 0,052\ .\ S^b$ We lezen een punt af b.v. het punt (30 , 20) $\Rightarrow$
$20 = 0,052.30^b$
Voer in : $y_1 = 0,052\ .\ 30^x$ en $y_2 = 20$ en neem b.v. het window [0 , 4] X [0 , 50]
Met intersect vinden we het snijpunt bij $x \approx 1,75$. $\Rightarrow$ De formule wordt nu :
$S = 0,052.S^{1,75} \Rightarrow b \approx 1,75$

c. Nu G = 3,80 meter = 380 cm. Er geldt 1 inch = 2,54 cm $\Rightarrow$ 1 cm = $\frac{1}{2,54}$ inch.

$\Rightarrow$ 380 cm = $\frac{380}{2,54} \approx 149,6\ldots$ inches.

We krijgen dus de vergelijking : $0,052.S^{1,75} = 149,606$

Voer in : $y_1 = 0,052 \,.\, x^{1,75}$ en $y_2 = 149,606$ en neem b.v. het window [0 , 100] X [0 , 200]

Met intersect vinden we het snijpunt bij $x \approx 94,74$.

De schouderhoogte wordt dan dus 94,74 inches en dat is ongeveer 241 cm.

39.

a. Hoogte van 1 km dan lezen we af dat de luchtdruk ongeveer 885 mb is.

Op een hoogte van 5 km is de luchtdruk ongeveer 560 mb.

Het percentage is dan ongeveer $\frac{560-885}{885}.100\% \approx -37\,\% \Rightarrow$

De afname is dus ongeveer 37 %.

b. Op zeeniveau is de luchtdruk 1000 mb . We lezen af op welke hoogte de luchtdruk 500 mb is.

De hoogte is dan ongeveer 6 km.

c. $P = 1000.g^h$

De grafiek gaat o.a. door het punt (8 , 400) $\Rightarrow 400 = 1000 \,.\, g^8 \Leftrightarrow g^8 = 0,4 \Leftrightarrow$

$g \approx (2,5)^{\frac{1}{8}} \approx 0,89$

d. Nu moet gelden : $1000.0,89^h = 50 \Leftrightarrow 0,89^h = \frac{50}{1000} \Leftrightarrow 0,89^h = 0,05 \Leftrightarrow h = {}^{0,89}\log(0,05) \Leftrightarrow$

$h = \frac{\log(0,05)}{\log(0,89)} \approx 25,71 \Rightarrow$ De hoogte is dus ongeveer 25,7 km.

e. De formule is : $P = 1000.0,89^h \Rightarrow \frac{dP}{dh} = 1000.0,89^h.\ln(0,89)$

Nu de bewering controleren aan de hand van twee verschillende punten:

Bij h = 2 geldt $\left[\frac{dP}{dh}\right]_{h=2} \approx -92,31$ mb/km.

Bij h = 4 geldt $\left[\frac{dP}{dh}\right]_{h=4} \approx -73,12$ mb/km.

Duidelijk is te zien dat -73,12 niet twee keer zo klein is als -92,31. $\Rightarrow$

Jelle heeft dus geen gelijk.

40.

a. $y = 5.\,^{3}\log(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5.\dfrac{1}{x.\ln(3)} = \dfrac{5}{x.\ln(3)}$

b. $y = 3.\log(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3.\dfrac{1}{x.\ln(10)} = \dfrac{3}{x.\ln(10)}$

c. $y = 5x + \ \log(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5 + \dfrac{1}{x.\ln(10)}$

d. $y = 3.\ \log(2x-5) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3.\dfrac{1}{(2x-5).\ln(10)}.2 = \dfrac{6}{(2x-5).\ln(10)}$

e. $y = 3 + \,^{2}\log(x^2-1) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(x^2-1\right).\ln(2)}.2x = \dfrac{2x}{\left(x^2-1\right).\ln(2)}$

f. $y = \log(4x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4x.\ln(10)}.4 = \dfrac{1}{x.\ln(10)}$

g. $y = \log(x^2+1) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right).\ln(10)}.2x = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right).\ln(10)}$

h. $y = \dfrac{3}{x} - \,^{0,2}\log(3x) = 3.x^{-1} - \,^{0,2}\log(3x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -3.x^{-2} - \dfrac{1}{(3x).\ln(0,2)}.3 = -\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x.\ln(0,2)}$

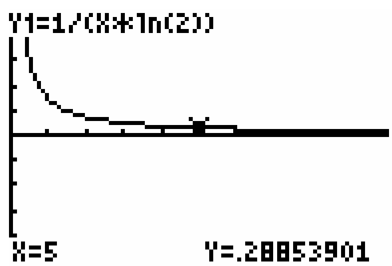
i. $y = \,^{2}\log(4-x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(4-x).\ln(2)}.(-1) = \dfrac{-1}{(4-x).\ln(2)}$

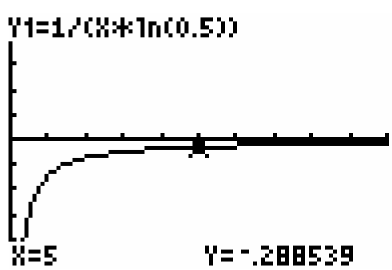
j. $y = x^2 - \,^{3}\log(2x-1) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x - \dfrac{1}{(2x-1).\ln(3)}.2 = 2x - \dfrac{2}{(2x-1).\ln(3)}$

41.

$y = \,^{2}\log(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x.\ln(2)}$

Nu de schets van de afgeleide bekijken $\Rightarrow$
We zien hier dat de afgeleide positief is en dalend is. $\Rightarrow$
De grafiek van $y = \,^{2}\log(x)$ is dus afnemend stijgend.





Nu $y = \,^{0,5}\log(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x.\ln(0,5)}$

Nu weer de schets bekijken van de afgeleide $\Rightarrow$

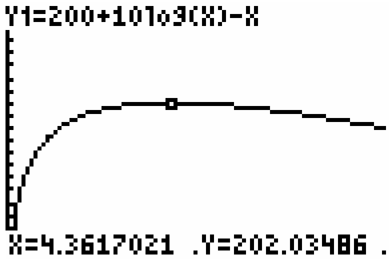
We zien nu dat de grafiek van de afgeleide negatief is en stijgend. $\Rightarrow$ De grafiek van $y = {}^{0,5}\log(x)$ is dus een afnemende dalende grafiek.

42. $BW = 200 + 10\log(x)$ met BW in duizenden euro's en $x > 1$

a. $\dfrac{dBW}{dx} = 10.\dfrac{1}{x.\ln(10)} = \dfrac{10}{x.\ln(10)}$ Aangezien $x > 1$ is geldt zeker dat de afgeleide positief is , daarom stijgt de grafiek van BW.

b. $W = BW - x = 200 + 10.\log(x) - x \Rightarrow \dfrac{dW}{dx} = \dfrac{10}{x.\ln(10)} - 1 \Rightarrow$

$\dfrac{dW}{dx} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{10}{x.\ln(10)} = 1 \Leftrightarrow x.\ln(10) = 10 \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{\ln(10)} \approx 4{,}34$



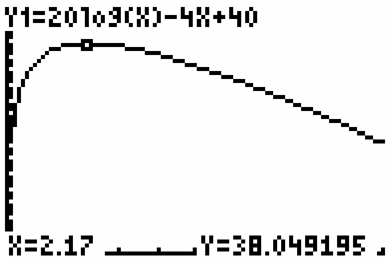
Verder blijkt uit de schets duidelijk dat we bij $x \approx 4{,}34$ te maken hebben met een maximum. $\Rightarrow$
De maximale winst is dus ongeveer 202000 euro.

43. Gegeven $R = 60 + 20\log(q)$ en $K = 4q + 20$ met R en K in duizenden euro's en q in duizendtallen.

$W = R - K = 60 + 20\log(q) - (4q + 20) = 20\log(q) - 4q + 40 \Rightarrow$

$\dfrac{dW}{dq} = 20.\dfrac{1}{q.\ln(10)} - 4 = \dfrac{20}{q.\ln(10)} - 4$ Nu geldt :

$\dfrac{dW}{dq} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{20}{x.\ln(10)} = 4 \Leftrightarrow x.4\ln(10) = 20 \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{4.\ln(10)} \approx 2{,}17$



Verder is uit de schets duidelijk te zien dat we bij $x \approx 2{,}17$ te maken hebben met een maximum.
$\Rightarrow$ De maximale winst is ongeveer 38000 euro.

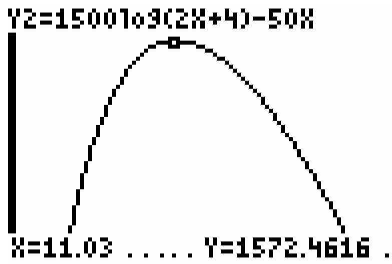
44. $N(t) = 1500\log(2t + 4) - 50t$ N is het aantal ziektegevallen en t het aantal dagen en $0 \le t \le 60$ en vanaf 1 november.

a. $\dfrac{dN}{dt} = 1500.\dfrac{1}{(2t+4).\ln(10)}.2 - 50 = \dfrac{1500}{(t+2).\ln(10)} - 50$

Voor het maximum moet gelden dat $\dfrac{dN}{dt} = 0$

Nu een keer met de GR:

Voer in : $y_1 = \dfrac{1500}{(x+2).\ln(10)} - 50$ en neem b.v. het window [0 , 15] X [-50 , 50].
Met de optie zero vinden we $x \approx 11{,}03$
Uit de schets zien we dat er bij $x \approx 11{,}03$ een maximum is.
Het maximum is dan dus op 12 november.

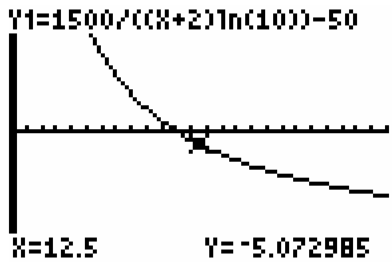


b. 1 december om 12.00 uur $\Rightarrow t = 30{,}5 \Rightarrow$
$\left[\dfrac{dN}{dt}\right]_{t=30{,}5} \approx -29{,}96 \Rightarrow$ De snelheid waarmee het aantal zieken afneemt is ongeveer 30 ,0 gevallen per dag.

c. Op 15 november om 12.00 uur hebben we $t = 14{,}5$
Nu geldt: $\left[\dfrac{dN}{dt}\right]_{t=14{,}5} = \dfrac{1500}{(14{,}5+2).\ln(10)} \approx -10{,}52$.
$\dfrac{-29{,}96}{-10{,}52} \approx 2{,}8 \Rightarrow$ De snelheid op 1 december om 12.00 uur is ongeveer 2,8 keer zo groot als de snelheid op 15 november om 12.00 uur.

d. Op 5 november gaat de t van 4 naar 5. $\Rightarrow N(5) \approx 1469{,}2$ en $N(4) \approx 1418{,}8 \Rightarrow$
De procentuele toename is dan : $\dfrac{1469{,}2 - 1418{,}8}{1418{,}8}.100\% \approx 3{,}6$ %.

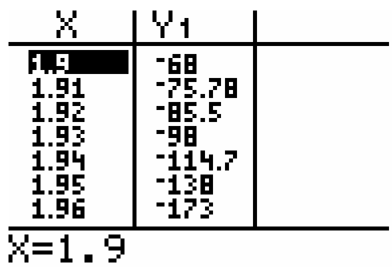
e. $N'(t) = \dfrac{1500}{(t+2).\ln(10)} - 50 \Rightarrow$ De schets wordt:
We zien hier dat de afgeleide afneemt van positief naar negatief. Er is dus sprake van een maximum.
We weten dat het maximum bij $t \approx 11{,}03$ ligt.
De afgeleide is na 11,03 negatief dus de grafiek is dalend.
Verder is de afgeleide dalend , daarom daalt de grafiek van N steeds sterker. Daarom neemt het aantal griepgevallen steeds verder af.



45. Gegeven $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

a. Als x steeds groter wordt dan neemt y steeds verder af tot een grenswaarde.
Enkele waarden: $y(100) \approx 2{,}071$; $y(500) \approx 2{,}014$; $y(800) \approx 2{,}009$ en $y(1000) \approx 2{,}007$

b. Als x steeds dichter in de buurt van de 2 komt dan wordt de y- waarde steeds negatieveren gaat tot aan het oneindige.
Als de x net de 2 gepasseerd is dan is de y-waarde heel erg groot.
We noemen de lijn met vergelijking $x = 2$ dan een verticale asymptoot. (V.A.)



X	Y1
1.9	-68
1.91	-75.78
1.92	-85.5
1.93	-98
1.94	-114.7
1.95	-138
1.96	-173

X=1.9

46. Gegeven : $N = \dfrac{-2t+4}{t-1}$ met $t \geq 0$.

a. $\left.\begin{array}{l} N(10000) \approx -2 \\ N(20000) \approx -2 \\ N(30000) \approx -2 \end{array}\right\} \Rightarrow N = 2$ is H.A.

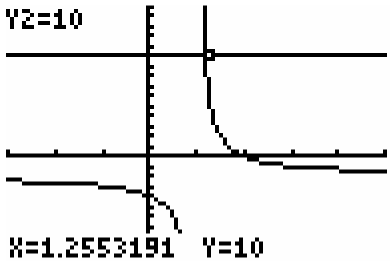
De noemer $t - 1 = 0$ voor $t = 1 \Rightarrow$ De lijn $t = 1$ is V.A.

b. Eerst oplossen $N = 10 \Leftrightarrow \dfrac{-2t+4}{t-1} = 10 \Rightarrow 10.(t - 1) = -2t + 4 \Leftrightarrow 10t - 10 = -2t + 4 \Leftrightarrow$

$12t = 14 \Rightarrow t = 1\frac{1}{6}$ Nu een schets van de grafieken van N en van $y = 6$.

We lezen nu af uit de grafiek:

$N > 10 \Rightarrow 1 < t < 1\frac{1}{6}$



c. $t \geq 0$ Eerst $t = 0$ dan $N = -4$ Nu weer kijken in de figuur en we lezen dan af :

$N \leq -4 \vee N > -2$.

d. $N(25) = -1{,}9167$ en $N(10) = -1{,}7778 \Rightarrow$

De procentuele toename is : $\dfrac{N(25) - N(10)}{N(10)} = \dfrac{-1{,}9167 - (-1{,}7778)}{-1{,}7778}.100\% \approx 7{,}8$ %.

47. $K = \dfrac{0{,}6x}{100-x}$ met K in miljoenen euro's en x in procenten.

a. $K = 4$ miljoen $\Rightarrow \dfrac{0{,}6x}{100-x} = 4 \Rightarrow 0{,}6x = 4(100 - x) \Leftrightarrow 0{,}6x = 400 - 4x \Leftrightarrow 4{,}6x = 400 \Leftrightarrow$

$x = \dfrac{400}{4{,}6} \Leftrightarrow x \approx 87{,}0 \Rightarrow$ Er komt ongeveer 13 % in het meer.

b. Als $x = 100$ dan is de noemer 0 en dat kan niet.

c. Als $x = 40$ dan $K = 0{,}4$ en als $x = 50$ dan $K = 0{,}6 \Rightarrow$

De relatieve toename is dus: $\dfrac{0{,}6 - 0{,}4}{0{,}4}.100\% = 50$ %.

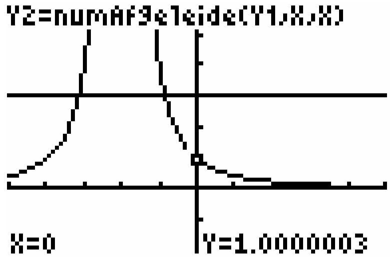
d. De relatieve toename is dan : $\dfrac{N(99) - N(89)}{N(89)}.100\% = \dfrac{59{,}4 - 4{,}8545}{4{,}8545}.100\% \approx 1124$ %.

e. De kosten om de laatste percentages verontreiniging te verwijderen kosten veel meer geld. De toename in de kosten van 89% naar 99% is zelfs 1124 %.

48. $t(x) = 3x + 2$; $n(x) = x + 2$ en $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$

a. $t'(x) = 3$; $n'(x) = 1$ en $\dfrac{t'(x)}{n'(x)} = \dfrac{3}{1} = 3$

b. We controleren de bewering met de GR.
Voer in : $y_1 = \dfrac{3x+2}{x+2}$ en y_2 = nDeriv(y_1 , x , x) en $y_3 = 3$
Nu gaan we zowel y_2 als y_3 plotten $\Rightarrow$
We zien duidelijk dat de grafieken van y_2 en y_3 niet samenvallen. De afgeleide van $f(x)$ is dus niet gelijk aan 3.



49.

a. $y = \dfrac{x+1}{x-4} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1.(x-4)-1.(x+1)}{(x-4)^2} = \dfrac{x-4-x-1}{(x-4)^2} = \dfrac{-5}{(x-4)^2}$

b. $y = 7x + \dfrac{-2x+3}{x+7} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 7 + \dfrac{-2.(x+7)-1.(-2x+3)}{(x+7)^2} = 7 + \dfrac{-2x-14+2x-3}{(x+7)^2} = 7 - \dfrac{17}{(x+7)^2}$

c. $y = \dfrac{3x^2}{6-x} + 4x^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x(6-x)-3x^2.(-1)}{(6-x)^2} + 8x = \dfrac{36x-6x^2+3x^2}{(6-x)^2} + 8x = \dfrac{36x-3x^2}{(6-x)^2} + 8x$

d. $y = \dfrac{4x+x^3}{8x^2-5} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(4+3x^2)(8x^2-5)-(4x+x^3)16x}{\left(8x^2-5\right)^2} =$

$\dfrac{32x^2-20+24x^4-15x^2-64x^2-16x^4}{\left(8x^2-5\right)^2} = \dfrac{8x^4-47x^2-20}{\left(8x^2-5\right)^2}$

50.

a. $A = \dfrac{-2}{3+2t} + 5t \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{0.(3+2t)-2.(-2)}{(3+2t)^2} + 5 = \dfrac{4}{(3+2t)^2} + 5$

b. $K = q - \dfrac{1}{q+8} \Rightarrow \dfrac{dK}{dq} = 1 - \dfrac{0.(q+8)-1.1}{(q+8)^2} = 1 - \dfrac{-1}{(q+8)^2} = 1 + \dfrac{1}{(q+8)^2}$

51. Gegeven: $P = 150 - \dfrac{50}{1+x}$ met $0 \le x \le 10$ en x is de hoeveelheid insecticide per oogst.

a. De procentuele toename is dan:

$$\frac{P(6,5)-P(4,5)}{P(4,5)}.100\% = \frac{143,33-140,91}{140,91}.100\% \approx 1,7\ \%.$$

b. $P = 150 - \dfrac{50}{1+x} \Rightarrow \dfrac{dP}{dx} = -\dfrac{0.(1+x)-1.50}{(1+x)^2} = -\dfrac{-50}{(1+x)^2} = \dfrac{50}{(1+x)^2}$

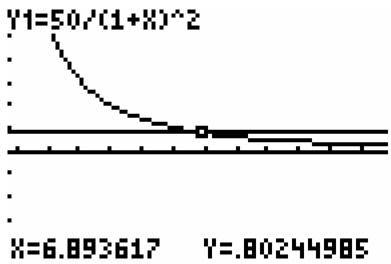
De afgeleide is altijd positief want de teller is positief en de noemer is ook altijd positief omdat de noemer een kwadraat is. Dit betekent dat de grafiek van *P* steeds stijgend is.

Verder geldt dat bij toenemende waarden van *x* de noemer steeds toeneemt dus wordt de waarde van de teller steeds kleiner. De afgeleide daalt dus. Daarom is de grafiek van *P* afnemend stijgend.

c. Snelheid is minder dan 0,8 $\Rightarrow \dfrac{dP}{dx} < 0,8 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{50}{(1+x)^2} < 0,8$

Voer in : $y_1 = \dfrac{50}{(1+x)^2}$ en $y_2 = 0,8$ en neem b.v. het window [0 , 12] X [-5 , 6]

Met intersect vinden we het snijpunt bij $x \approx 6,9$. Uit de schets lezen we af: $\dfrac{dP}{dx} < 0,8$ voor $x > 6,9$



52. Gegeven: $q = \dfrac{20p+1600}{4p+5}$ met *p* is de prijs in euro's en *q* is het aantal verkochte kisten per dag.

a. Er moet gelden $q = 20 \Rightarrow$

$$\frac{20p+1600}{4p+5} = 20 \Leftrightarrow 20p+1600 = 20(4p+5) \Leftrightarrow 20p+1600 = 80p+100 \Leftrightarrow -60p = -1500 \Rightarrow$$

$p = 25 \Rightarrow$ De prijs is dan 25 euro.

b. $q = \dfrac{20p+1600}{4p+5} \Rightarrow \dfrac{dq}{dp} = \dfrac{20.(4p+5)-4.(20p+1600)}{(4p+5)^2} = \dfrac{80p+100-80p-6400}{(4p+5)^2} = -\dfrac{6300}{(4p+5)^2}$

De teller is positief en de noemer ook positief (kwadraat) .
Door het minteken is de afgeleide negatief . Daarom neemt de verkoop af bij het toenemen van de prijs.

c. $\left[\dfrac{dq}{dp}\right]_{p=18} = -\dfrac{6300}{(4.18+5)^2} \approx -1,06 \ \Rightarrow$ De verkoop neemt af met 1,06 kist per euro.

53. $P = \dfrac{100(t^2-t+1)}{t^2+1}$ met *P* in procenten en *t* in weken.

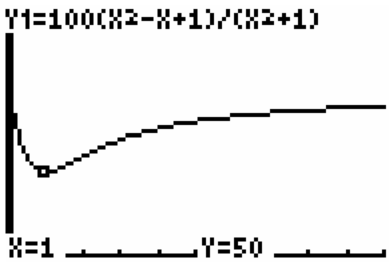
a. Voer in : $y_1 = \dfrac{100(x^2-x+1)}{x^2+1}$ en y_2 = nDeriv(y_1 , x , x) $\Rightarrow$ De snelheid na 4 weken is nu :

$\left[\dfrac{dP}{dt}\right]_{t=4}$ = nDeriv(y_1 , x , 4) $\approx$ 5,19 $\Rightarrow$ De snelheid is dan 5,19% per week = 0,7 % per dag.

b. $$P = \frac{100(t^2-t+1)}{t^2+1} \Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{100.(2t-1).(t^2+1)-2t.100.(t^2-t+1)}{(t^2+1)^2} =$$

$$\frac{200t^3+200t-100t^2-100-200t^3+200t^2-200t}{(t^2+1)^2} = \frac{100t^2-100}{(t^2+1)^2} \Rightarrow$$

$\left[\dfrac{dP}{dt}\right]_{t=1} = \dfrac{100.1^2-100}{(1^2+1)^2} = 0$ Uit de schets volgt verder dat er bij $x = t = 1$ een minimum is. $\Rightarrow$
Het zuurstofgehalte is na 1 week minimaal.



c. $P = 98 \Rightarrow \dfrac{100(t^2-t+1)}{t^2+1} = 98$
Voer verder in y_3 = 98. en neem b.v. het window [0 , 60] X [0 , 110]
met intersect vinden we $x \approx 0{,}02$ en $x \approx 49{,}98$.
De waarde t = 0,02 moeten we niet hebben $\Rightarrow$ 98% krijgen we na ongeveer 350 dagen.

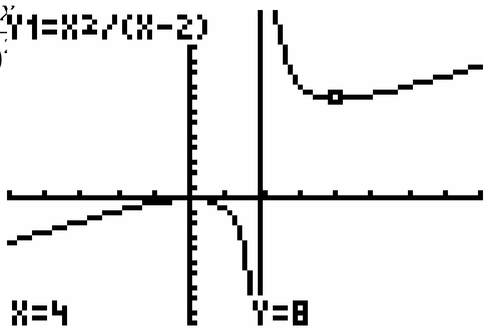
Opmerking. Het eerste snijpunt is in dit window niet te zien. Als $0 \le x \le 10$ gekozen is in het window, dan is dit snijpunt wel te zien.

d. De snelheid na 8 weken is : $\left[\dfrac{dP}{dt}\right]_{t=8} \approx$ 1,4911 % per week = 0,213 % per dag.
en $P(8)$ = 87,69.
De snelheid verandert daarna niet.
Het zuurstofgehalte moet nog stijgen met 100% - 87,69% = 12,31 %.
Het aantal dagen dat nog nodig is is dan : $\dfrac{12{,}31}{0{,}213} = 57{,}79 \Rightarrow$ Er zijn dan nog ongeveer 58 dagen nodig.
Vanaf het oorspronkelijke begin hebben we in totaal 8 . 7 + 58 = 114 dagen nodig.

54. Gegeven: $y = \dfrac{x^2}{x-2}$

a. Voor de extreme waarden is nodig: $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$

$$y = \frac{x^2}{x-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x.(x-2)-1.x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$



$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$

$\frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4$

Zie nu de schets . Dan blijkt dat er bij x = 0 een maximum is en bij x = 4 een minimum.
De extreme waarden zijn dus :
max $y(0) = 0$ en min $y(4) = 8$.

b. Raaklijn in x = 3 Er geldt $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = \frac{9-4.3}{(3-2)^2} = -3 \Rightarrow$ Stel de vergelijking is nu :
$y = -3x + b$ Het raakpunt is bij x = 3 dan y = 9. Nu dit punt invullen in de vergelijking van de lijn. $\Rightarrow$ 9 = -3 . 3 + $b \Leftrightarrow b$ = 18 $\Rightarrow$ De gevraagde vergelijking is : $y = -3x + 18$.

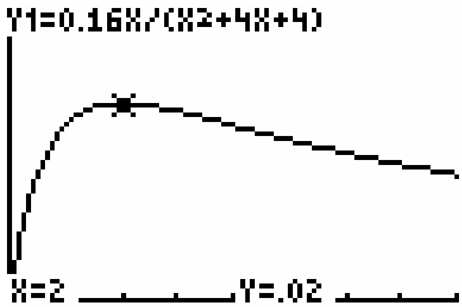
55. $C = \frac{0{,}16t}{t^2+4t+4}$ met C in mg per cm^3 en t in uren.

a.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{0{,}16(t^2+4t+4)-(2t+4)(0{,}16t)}{(t^2+4t+4)^2} = \frac{0{,}16t^2+0{,}64t+0{,}64-0{,}32t^2-0{,}64t}{(t^2+4t+4)^2} = \frac{-0{,}16t^2+0{,}64}{(t^2+4t+4)^2}$$

Er geldt: $\left[\frac{dC}{dt}\right]_{t=0} = \frac{0{,}64}{16} = 0{,}04 > 0 \Rightarrow$ De concentratie neemt dan meteen toe.

b. Maximaal $\Rightarrow \frac{dC}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{-0{,}16t^2+0{,}64}{(t^2+4t+4)^2} = 0 \Leftrightarrow -0{,}16t^2+0{,}64=0 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow$
t = -2 (vervalt) $\vee$ t = 2 . Nu weer de schets van C. $\Rightarrow$
Er is dus duidelijk een maximum bij x = 2. $\Rightarrow$
De concentratie is dus maximaal na twee uur.



c. $\left[\frac{dC}{dt}\right]_{t=5} \approx$ -0,0014 en $\left[\frac{dC}{dt}\right]_{t=10} \approx$ -0,00074

We krijgen dus: $\frac{-0{,}0014}{-0{,}00074} \approx 1{,}89$ $\Rightarrow$ De snelheid na 5 uur is bij benadering ongeveer twee keer zo groot als de snelheid bij t = 10.

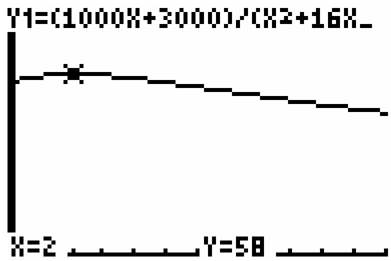
d. Als t = 24 dan $C \approx 0{,}00568 > 0{,}005 \Rightarrow$
De aanwezigheid van het medicijn is na 24 uur nog steeds aantoonbaar.

56. $V = \dfrac{1000t + 3000}{t^2 + 16t + 64} + 8$ met V is de verkoop per maand en t is de tijd in maanden na stoppen van de reclame.

a. Bij stoppen $\Rightarrow t = 0 \Rightarrow V(0) = \dfrac{3000}{64} + 8 \approx 54{,}9 \Rightarrow$
De verkoop was direct na stoppen ongeveer 55 stuks per maand.

b.
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1000.(t^2 + 16t + 64) - (2t + 16).(1000t + 3000)}{(t^2 + 16t + 64)^2} =$$
$$\frac{1000t^2 + 16000t + 64000 - 2000t^2 - 16000t - 6000t - 48000}{(t^2 + 16t + 64)^2}$$
$$= \frac{-1000t^2 - 6000t + 16000}{(t^2 + 16t + 64)^2} \Rightarrow \left[\frac{dV}{dt}\right]_{t=0} = \frac{16000}{64^2} \approx 3{,}9 > 0 \Rightarrow$$
De verkoop stijgt nog steeds direct na stoppen van de reclame.

c. De omzet gaat dalen als de afgeleide van positief naar negatief gaat. Dus er moet dan gelden :
$$\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{-1000t^2 - 6000t + 16000}{(t^2 + 16t + 64)^2} = 0 \Rightarrow$$
$$-1000t^2 - 6000t + 16000 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 16 = 0 \Leftrightarrow (t + 8)(t - 2) = 0 \Rightarrow$$
t = -8 (kan niet) of t = 2
Uit de schets volgt dat er bij t = 2 een maximum is. Daaruit volgt dat de verkoop na 2 maanden zal gaan dalen.



d. Op den duur d.w.z. na vele maanden . Er geldt :
$V(1000) \approx 8{,}99$; $V(5000) \approx 8{,}20$; $V(10000) \approx 8{,}10$; $V(40000) \approx 8{,}03$ en $V(100000) \approx 8{,}01$
$\Rightarrow$ Uiteindelijk is de verkoop nog maar 8 stuks per maand.

57. $T = 37 + \dfrac{45t}{t^2 + 70}$ met T in $^\circ$C en t in uren.

a. Voer in : $y_1 = 37 + \dfrac{45x}{x^2 + 70}$
Het 4^e uur dus t van 3 naar 4. $T(4) - T(3) = y_1(4) - y_1(3) = 39{,}093 - 38{,}709 \approx 0{,}38 \Rightarrow$
De temperatuur nam met 0,38 ºC toe.

b. $\dfrac{dT}{dt}=\dfrac{45(t^2+70)-2t.45t}{(t^2+70)^2}=\dfrac{45t^2+3150-90t^2}{(t^2+70)^2}=\dfrac{3150-45t^2}{(t^2+70)^2} \Rightarrow$

2 mei 17.30 uur dan t = 29,5 $\Rightarrow \left[\dfrac{dT}{dt}\right]_{t=29,5}=\dfrac{-45.29,5^2+3150}{(29,5^2+70)^2}\approx$ - 0,04 $\Rightarrow$

De snelheid waarmee de temperatuur dan afneemt is ongeveer 0,04 ºC per uur.

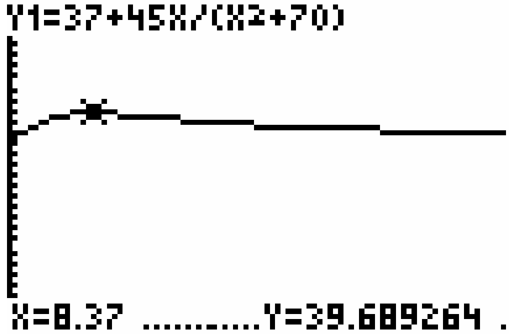
c. Voor het maximum geldt :

$\dfrac{dT}{dt}=0 \Rightarrow \dfrac{3150-45t^2}{(t^2+70)^2}=0 \Rightarrow 3150-45t^2=0 \Leftrightarrow 45t^2=3150 \Leftrightarrow t^2=70 \Leftrightarrow$

$t \approx$ - 8,37 (kan niet) of $t \approx 8,37$.

Uit de schets volgt dat er een maximum is bij $x \approx 8,37 \Rightarrow$

De maximale lichaamstemperatuur van Frank is ongeveer 39,7 ºC.



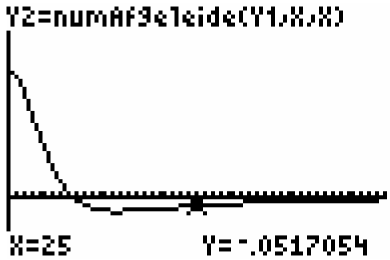
d. Voer in : $y_2=\dfrac{3150-45x^2}{(x^2+70)^2}$ en neem b.v. het window [0 , 50] X [-0,3 ; 1] . De schets wordt dan :

Met de optie zero vinden we het snijpunt met de x-as.

We vinden dan $x \approx$ 8,37.

Uit de schets blijkt dat de afgeleide vanaf $t \approx 8,37$ negatief is ,daarom daalt de temperatuurfunctie T van af $t \approx 8,37$.

Eerst is er een toenemende daling omdat de afgeleide steeds kleiner wordt . Vervolgens is er een afnemende daling omdat na het minimum van de afgeleide blijkt dat de helling steeds groter wordt.



58. $f(x)=x^2 \quad g(x)=2x+1$ en $p(x)=f(x).g(x)=2x^3+x^2$

a. $p(x)=2x^3+x^2 \Rightarrow p'(x)=6x^2+2x$

b. $f'(x)=2x \quad g'(x)=2$ en $f'(x).g'(x)=2x.2=4x$

c. Uit a en b volgt duidelijk dat $p'(x)$ niet gelijk is aan $f'(x).g'(x)$

59.

a. $y=5x.\log(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=5.\log(x)+5x.\dfrac{1}{x.\ln(10)}=5\log(x)+\dfrac{5}{\ln(10)}$

b. $p = q^2.2^q \Rightarrow \dfrac{dp}{dq} = 2q.2^q + q^2.2^q.\ln(2)$

c. $N = (t+1).{}^2\log(t) \Rightarrow \dfrac{dN}{dt} = 1.{}^2\log(t) + (t+1).\dfrac{1}{t.\ln(2)} = {}^2\log(t) + \dfrac{t+1}{t.\ln(2)}$

d. $B = a.10^a \Rightarrow \dfrac{dB}{da} = 1.10^a + a.10^a.\ln(10) = 10^a + a.10^a.\ln(10)$

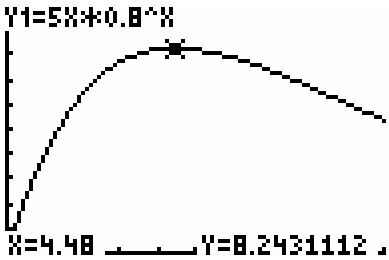
60. $N = 5t.0{,}8^t$

a. $\dfrac{dN}{dt} = 5.0{,}8^t + 5t.0{,}8^t.\ln(0{,}8) \;\Rightarrow\; \left[\dfrac{dN}{dt}\right]_{t=3} = 5.0{,}8^3 + 5.3.0{,}8^3.\ln(0{,}8) \;\approx 0{,}846 \;\Rightarrow$

De snelheid op t = 3 is dus meer dan 0,8.

b. $\left[\dfrac{dN}{dt}\right]_{t\approx 4{,}48} = 5.0{,}8^{4{,}48} + 5.4{,}48.0{,}8^{4{,}48}.\ln(0{,}8) \;\approx 0{,}00058 \approx 0$.

Verder volgt uit de schets van N dat we bij $t \approx 4{,}48$ te maken hebben met een maximum.



61.

$$\frac{d}{dx}\big(a.f(x)\big) = \frac{d}{dx}(a).f(x) + a.\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = 0.f(x) + a.f\,'(x) = a.f\,'(x)$$

62.

a. $y = 3^{2x} + 3^{-2x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3^{2x}.\ln(3).2 + 3^{-2x}.\ln(3).(-2) = 3^{2x}.\ln(3).2 - 3^{-2x}.\ln(3).2$

b. $y = \dfrac{2}{3^x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{0.3^x - 2.3^x.\ln(3)}{\left(3^x\right)^2} = -\dfrac{2.\ln(3)}{3^x}$

c. $y = \dfrac{x+1}{2^x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1.2^x - 2^x.\ln(2).(x+1)}{\left(2^x\right)^2}$

d. $y = 2^{3x} + 3x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2^{3x}.\ln(2).3 + 3$

63.

a. $y = x.\log(x) + 3x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 1.\log(x) + x.\dfrac{1}{x.\ln(10)} + 3 = \log(x) + \dfrac{1}{\ln(10)} + 3$

b. $N = \dfrac{25}{1+4.0,7^7} \Rightarrow \dfrac{dN}{dt} = \dfrac{0.(1+4.0,7^t)-25.4.0,7^t.\ln(0,7)}{(1+4.0,7^t)^2} = -\dfrac{100.0,7^t.\ln(0,7)}{(1+4.0,7^t)^2}$

c. $B = 4.\log(2a-1) \Rightarrow \dfrac{dB}{da} = 4.\dfrac{1}{(2a-1).\ln(10)}.2 = \dfrac{8}{(2a-1).\ln(10)}$

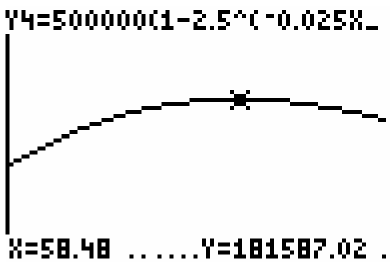
d. $E = 4p + \sqrt{100-p} \Rightarrow \dfrac{dE}{dp} = 4 + \dfrac{1}{2\sqrt{100-p}}.(-1) = 4 - \dfrac{1}{2\sqrt{100-p}}$

64. $R = 1 - 2,5^{-0,025t}$ met t in dagen.

a. Voer in y_1 = $R = 1-2,5^{-0,025x} \Rightarrow$ $R(30) = y_1(30) \approx 0,49703 \Rightarrow$
Er zullen 100000 . 0,49703 = 49703 mensen de cd kopen.
De reclamekosten zijn dan 12000 + 30 . 3000 = 102000 euro.
Nettowinst = opbrengst – kosten = 49703 . 5 – 102000 = 146515 euro

b. $K = 12000 + 3000t$ en W = opbrengst-kosten = $100000.(1-2,5^{-0,025t}).5-(12000+3000t)$ =
$500000.(1-2,5^{-0,025t})-12000-3000t$

c. $W = 500000 - 500000.2,5^{-0,025t} - 12000 - 3000t \Rightarrow$
$\dfrac{dW}{dt} = -500000.2,5^{-0,025t}.\ln(2,5).(-0,025) - 3000 = 12500.2,5^{-0,025t}.\ln(2,5) - 3000$
Voor het maximum moet gelden dat $\dfrac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow$
Voer in : $y_2 = \dfrac{dW}{dt} = 12500.2,5^{-0,025x}.\ln(2,5) - 3000$ en neem b.v. het window
[40 , 70] X [-100 , 100] . Met de optie zero vinden we $x \approx 58,48$.
Verder blijkt uit de schets van W dat we inderdaad bij
$x \approx$ 58,48 te maken hebben met een maximum.
$\Rightarrow$ De reclamecampagne duurt dus ongeveer 58 dagen.
$\Rightarrow R(58) = 0,73516 \Rightarrow$
Er worden dan 100000 . 0,73516 = 73516 cd's verkocht.



65. $N = \dfrac{80000}{4+75.2^{-1,2t}}$ Met N is het aantal personen en t het aantal weken.

a. $t = 0 \Rightarrow N = \dfrac{80000}{4+75} \approx 1013 \Rightarrow$ 1013 personen.

b. $\dfrac{dN}{dt}=\dfrac{0.(4+75.2^{-1,2t})-80000.75.2^{-1,2t}.\ln(2).(-1,2)}{\left(4+75.2^{-1,2t}\right)^2}=\dfrac{7200000.2^{-1,2t}.\ln(2)}{\left(4+75.2^{-1,2t}\right)^2}$

Voer nu in : $y_1=\dfrac{80000}{4+75.2^{-1,2x}}$ en $y_2=\dfrac{7200000.2^{-1,2x}.\ln(2)}{\left(4+75.2^{-1,2x}\right)^2}$

Nu geldt: $\left[\dfrac{dN}{dt}\right]_{t=2}$ = $y_2(2)\approx 2851,5 \Rightarrow$ De uitbreiding gaat op t = 2 met een snelheid van ongeveer 2852 personen per week.

c. Voer ook in $y_3 = 18000$ en we hadden nog $y_1 = N(x)$ en neem b.v. het window [0 , 20] X [0 , 25000].
Met intersect vinden we het snijpunt bij $x\approx 6,17$ $\Rightarrow$
Na ongeveer 6,17 . 7 ≈ 43 dagen zijn er ongeveer 18000 besmettingen.

d. Zie de tabel van $y_1 = N(x)$ $\Rightarrow N(10)\approx 19909$; $N(20)\approx 20000$ en $N(40)\approx 20000 \Rightarrow$
De grenswaarde is dus bij 20000 personen.

e. We hadden al ingevoerd: en $y_2=\dfrac{7200000.2^{-1,2x}.\ln(2)}{\left(4+75.2^{-1,2x}\right)^2}$ en neem b.v. het window [0 , 10] X [0 , 5000]
Met de optie maximum vinden we het maximum bij $x\approx 3,52 \Rightarrow$
De maximale snelheid van de uitbreiding is na ongeveer 3,5 dag.

66. $p(q)=1560-a.\sqrt{q}$ a is een positieve constante; p is de prijs in euro's en q is de dagverkoop.

a. De opbrengst $R = p\,.\,q =$ $(1560-a.\sqrt{q}).q=1560q-a.q\sqrt{q}=1560-a.q^{1,5}$

Nu geldt: $\dfrac{dR}{dq}=1560-a.1,5.q^{0,5}$

Uit het gegeven volgt dat

$$\left[\dfrac{dR}{dq}\right]_{q=169}=0\Rightarrow 1560-1,5a.169^{0,5}=0\Leftrightarrow 1560=19,5.a\Leftrightarrow a=\dfrac{1560}{19,5}\Leftrightarrow a=80$$

b. Nu $a = 92 \Rightarrow$ $p(q)=1560-92.\sqrt{q}$ en $K(q)=250-b.q$

De opbrengst $R= p.q=(1560-92\sqrt{q}).q=1560q-92q\sqrt{q}$

De winst is dan : $W=R-K=\left(1560q-92q\sqrt{q}\right)-\left(250+bq\right)=1560q-92.q^{1,5}-250-bq$

Voor de maximale winst moet gelden : $\dfrac{dW}{dq}=0$ $\Rightarrow$

$\dfrac{dW}{dq}=1560-1,5.92.q^{0,5}-b$ We krijgen dus : $1560-138.q^{0,5}-b=0$ **(1)**

Dit geldt voor een prijs p van 548 euro $\Rightarrow$ $1560-92.\sqrt{q}=548\Leftrightarrow 1012=92.\sqrt{q}$

$\Leftrightarrow \sqrt{q} = \frac{1012}{92} \Leftrightarrow \sqrt{q} = 11 \Leftrightarrow q = 121$

Nu gaan we q = 121 invullen in vergelijking **(1)** invullen om dan b te kunnen berekenen. $\Rightarrow$
$1560 - 138.121^{0,5} - b = 0 \Leftrightarrow 1560 - 1518 - b = 0 \Leftrightarrow b = 42$